

Limites d'une fonction

➤ **Limites et inverses des fonctions** $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) **et** $x \mapsto \sqrt{x}$:

$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ <p style="text-align: center;">></p>	$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Si n est un nombre pair alors:	Si n est un nombre impair alors:
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$ <p style="text-align: center;">></p>	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$ <p style="text-align: center;">></p>
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$ <p style="text-align: center;"><</p>	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = -\infty$ <p style="text-align: center;"><</p>

➤ **Limites des fonctions polynômes et rationnelles en** $+\infty$ / $-\infty$:

Limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ et en $-\infty$ est celle de son terme de plus haut degré

Limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ et en $-\infty$ est celle du quotient des termes de plus haut degré

➤ **Limites des fonctions trigonométriques :**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
---	---	---

➤ **Limites des fonctions de type** $x \mapsto \sqrt{u(x)}$:

$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$		$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{u(x)}$
$l \geq 0$	➡	\sqrt{l}
$+\infty$		$+\infty$

Ces résultats restent valable, à droite en x_0 , à gauche en x_0 , en $+\infty$ et en $-\infty$

➤ **Théorème de comparaison :**

$$\left. \begin{array}{l} U(x) \leq f(x) \leq V(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} U(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow x_0} V(x) = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

$$\left. \begin{array}{l} |f(x) - \ell| \leq V(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} V(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \leq U(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} U(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} U(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} U(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

Ces résultats restent valable, à droite en x_0 , à gauche en x_0 , en $+\infty$ et en $-\infty$

➤ **Limites et opérations :**

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) + f(x)]$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	$\ell < 0$		$\ell > 0$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \times f(x)]$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell < 0$		$\ell > 0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

Ces résultats restent valable, à droite en x_0 , à gauche en x_0 , en $+\infty$ et en $-\infty$

➤ **Continuité en un point :**

$$f \text{ est continue en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

➤ **Continuité à droite - Continuité à gauche :**

- f est continue à droite en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0}^> f(x) = f(x_0)$
- f est continue à gauche en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0}^< f(x) = f(x_0)$
- f est continue en $x_0 \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en x_0

➤ **Continuité sur un intervalle :**

- f est continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$ si f est continue en chaque élément de $]a, b[$
- f est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ si f est continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et f est continue à droite en a et à gauche en b

➤ **Opérations sur les fonctions continues:**

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et k un réel

- Les fonctions $f + g, f \times g, kf$ et f^n avec $n \in \mathbb{N}$, sont continues sur I
- Les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I si g ne s'annule pas sur I

Conséquences :

- Les fonctions polynômes sont continues sur \mathbb{R}
- Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition
- La fonction : $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$
- Les fonctions : $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur \mathbb{R}

➤ **Composé de deux fonctions continues:**

Si f une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction continue sur l'intervalle $f(I)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I

➤ **L'image d'un intervalle par une fonction continue:**

- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Cas particulier :

Soit f est continue et strictement monotone sur un intervalle I

Le tableau suivant illustre les différents cas possibles de l'intervalle $f(I)$

L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$	
	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a, b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a, b[$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right]$
$]a, b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$	$\left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$]a, b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$[a, +\infty[$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a) \right]$
$]a, +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$] -\infty, a]$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(a) \right]$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$
$] -\infty, a[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$
\mathbb{R}	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$

➤ Théorème des valeurs intermédiaires :

Si f est continue sur un intervalle $[a, b]$, alors pour tout réel β compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel α de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(\alpha) = \beta$

Si f est continue sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $]a, b[$

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]a, b[$

➤ Méthode de dichotomie :

Soit f est fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]a, b[$

$$\text{Si } f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$$

$$\text{Alors : } a < \alpha < \frac{a+b}{2}$$

$$\text{l'amplitude de cet encadrement est : } \frac{b-a}{2}$$

On poursuit la recherche de α sur l'intervalle $\left] a; \frac{a+b}{2} \right[$

$$\text{Si } f(b) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$$

$$\text{Alors : } \frac{a+b}{2} < \alpha < b$$

$$\text{l'amplitude de cet encadrement est : } \frac{b-a}{2}$$

On poursuit la recherche de α sur l'intervalle $\left] \frac{a+b}{2}; b \right[$

On arrête le processus dès que l'amplitude de l'encadrement de α est inférieur à la précision souhaitée